УДК 532.517.2 : 621.186.1

М. В. Мельничук, І. І. Горделюк, В. М. Турик
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

АНАЛІТИЧНА ОЦІНКА ДИСИПАЦІЇ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ПРИ ЛАМІНАРНІЙ ТЕЧІЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ В КАНАЛАХ КРУГЛОГО ТА ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗІВ

В традиційній літературі з механіки рідини і газу питання дисипації енергії потоків в прямолінійних каналах різного поперечного перерізу, як правило, обмежені чисто гідравлічними поняттями втрат напору, тобто механічної енергії одиниці ваги рідини. Для практичних цілей втрати напору на тертя при рівномірному русі рідини в каналах визначають загально відомою напівемпіричною формулою Дарсі-Вейсбаха, яка передбачає підстановку довжини каналу, його гідравлічного (еквівалентного) діаметра, швидкісного напору і так званого безрозмірного коефіцієнта гідравлічного тертя, на який частково покладено функції дисипації енергії. Формула має виключно прикладний характер і лише певною мірою відображає фізичну сутність дисипації енергії при русі рідини в каналах. Зауважимо, що формула Дарсі-Вейсбаха мала б справджуватися незалежно від довжини каналу. Однак легко помітити, що при оцінці втрати напору на одиницю довжини каналу зникає і без того дуже опосередкований зв'язок цієї формули з енергетичними перетвореннями, оскільки вона зводиться до безрозмірної величини, фактично ще до одного коефіцієнта, який інтегрально залежить від перелічених вище величин, включаючи зазначений вище коефіцієнт гідравлічного тертя.

Для більш глибокого розуміння процесу дисипації механічної енергії нестисливої рідини внаслідок дії сил в'язкості потрібно застосувати термодинамічний підхід з урахуванням необоротності процесу в межах механіки суцільного середовища. Врахуємо зв'язок тензорів в'язких напружень і швидкостей деформацій для ньютонівської рідини:

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right),$$

де μ — динамічна в'язкість; $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}$ — похідні складових швидкості по координатах.

Можна показати, що дисипація механічної енергії *E* за одиницю часу для випадку ламінарної течії визначається наступною формулою [1]:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_i}\right)^2 dV. \tag{1}$$

Тут *V* — деякий фіксований в просторі ейлерів об'єм, заповнений рухомою рідиною.

Умовою перетворення механічної енергії *E* в теплову в результаті дисипації є

$$\frac{dQ_{diss}}{dt} = -\frac{dE}{dt}, \tag{2}$$

де $\frac{dQ_{diss}}{dt}$ — елементарний тепловий потік, що виділяється при дисипації енергії; *t* — час.

Знак мінус в формулі (2) обумовлений різницею знаків похідних, утворюючих рівність.

1. Як відомо, параболічний закон Пуазейля щодо профілю швидкості стабілізованого і стаціонарного ламінарного руху рідини під дією градієнта тиску в круглій трубі, поздовжня вісь якої збігається з віссю *x*, має вигляд (прийнявши $\upsilon_x = \upsilon$)

$$\upsilon = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left(r_0^2 - r^2\right), \qquad (3)$$

що після усереднення величини швидкості за поперечним перерізом труби дає

$$\upsilon_c = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dx}r_0^2 . \qquad (4)$$

На підставі виразів (4) і (3) маємо

$$\upsilon = 2\upsilon_c\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right). \qquad (5)$$

2. При стабілізованому і стаціонарному ламінарному русі рідини в каналі прямокутного перерізу висотою $2a$ і шириною b з координатними осями y і z в його площині за умови 2a/b<1, нехтуючи зміною швидкості вздовж осі z за шириною перерізу, можна отримати також параболічний профіль швидкості $\upsilon(y)$ за висотою каналу

$$\upsilon = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(a^2 - y^2\right). \qquad (6)$$

Усереднення значення швидкості за перерізом каналу приводить до виразу

$$\upsilon_c = -\frac{1}{3\mu}\frac{dp}{dx}a^2 . \qquad (7)$$

На підставі виразів (7) і (6) легко отримати

$$\upsilon = \frac{3}{2}\upsilon_c\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right). \qquad (8)$$

3. Введемо поняття «погонної» кількості теплоти дисипації: $q_{diss} = Q_{diss}/L$, де L — довжина каналу. Тоді елементарний тепловий потік, що виділяється при дисипації механічної енергії на одиницю довжини досліджуваних каналів визначається інтегруванням рівняння (2) з урахуванням загального виразу (1), а також формул (5) і (8). В результаті отримаємо:

для каналу круглого поперечного перерізу $\dfrac{dq_{diss}}{dt} = \dfrac{\mu}{2}\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} 2\left(\dfrac{d\upsilon}{dr}\right)^2 r dr d\varphi = 8\pi\mu\upsilon_c^2;$

для каналу прямокутного поперечного перерізу $\dfrac{dq_{diss}}{dt} = \dfrac{\mu}{2}\int\limits_0^{b}\int\limits_{-a}^{a}\left(\dfrac{d\upsilon}{dy}\right)^2 dz dy = 3\mu\upsilon_c^2\dfrac{b}{a}.$

Висновки

З'ясовано, що «погонний» тепловий потік дисипації механічної енергії в ламінарних потоках нестисливої рідини в досліджуваних каналах пропорціональний квадрату середньої швидкості, а в трубах круглого перерізу він не залежить від радіусу труб. Отримані результати не є цілком очевидним при звичайному аналізі гідравлічної формули Дарсі-Вейсбаха.

Список використаних джерел

1. Haase R. Thermodynamics of Irreversible Processes. Darmstadt. Dover Pubns; Reprint. 1990. 513 p.